अध्याय 4

द्विघात समीकरण

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- द्विघात समीकरण: चर x में एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप की होती है, जहाँ a, b, और c वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $a \neq 0$ है।
- द्विघात समीकरण के मूल : एक वास्तविक संख्या α द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल कहलाती है, यदि $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ हो।
- द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल वही होते हैं, जो द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक होते हैं।
- गुणनखंडन की विधि द्वारा एक द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करना: यदि हम एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के गुणनखंड कर लेते हैं, तो $ax^2 + bx + c$ के रैखिक गुणनखंडों को शून्य के बराबर करके द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल ज्ञात किए जा सकते हैं।
- पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करना: एक उपयुक्त अचर को जोड़ कर और घटा कर उसे हम x^2 और x के पदों के साथ मिलाते हैं, ताकि एक पूर्ण वर्ग बन जाए और फिर उन्हें x के लिए हल करते हैं।
- द्विघात सूत्र : यदि $b^2 - 4ac \geq 0$ हो, तो द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के वास्तविक मूल $\frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ प्राप्त होते हैं।
- व्यंजक $b^2 - 4ac$ द्विघात समीकरण का विविक्तकर कहलाता है।

- एक द्विघात समीकरण के मूलों का अस्तित्व : एक द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के

    (i) दो भिन्न वास्तविक मूल होते हैं, यदि $b^2 - 4ac > 0$ है।
    (ii) दो बराबर वास्तविक मूल होते हैं, यदि $b^2 - 4ac = 0$ है।
    (iii) कोई वास्तविक मूल नहीं होते हैं, यदि $b^2 - 4ac < 0$ है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए:

प्रतिदर्श प्रश्न 1: निम्नलिखित में से कौन एक द्विघात समीकरण नहीं है?

(A) $(x+2)^2 = 2(x+3)$ (B) $x^2 + 3x = (-1)(1-3x)^2$

(C) $(x+2)(x-1) = x^2 - 2x - 3$ (D) $x^3 - x^2 + 2x + 1 = (x+1)^3$

हल : उत्तर (C)

प्रतिदर्श प्रश्न 2: पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा द्विघात समीकरण $4x^2 - \sqrt{3}x - 5 = 0$ को हल करने के लिए, इसमें किस अचर को जोड़ना और घटाना चाहिए?

(A) $\frac{9}{16}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

हल : उत्तर (B)

प्रश्नावली 4.1

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

1. निम्नलिखित में से कौन द्विघात समीकरण है?

(A) $x^2 + 2x + 1 = (4-x)^2 + 3$ (B) $-2x^2 = (5-x)\left(2x - \frac{2}{5}\right)$

(C) $(k+1)x^2 + \frac{3}{2}x = 7$, जहाँ $k = -1$ (D) $x^3 - x^2 = (x-1)^3$

2. निम्नलिखित में से कौन द्विघात समीकरण नहीं है?

(A) $2(x-1)^2 = 4x^2 - 2x + 1$ (B) $2x - x^2 = x^2 + 5$

(C) $(\sqrt{2}x + \sqrt{3})^2 + x^2 = 3x^2 - 5x$ (D) $(x^2 + 2x)^2 = x^4 + 3 + 4x^3$

3. निम्नलिखित में से किस समीकरण का एक मूल 2 है?

(A) $x^2 - 4x + 5 = 0$ (B) $x^2 + 3x - 12 = 0$

(C) $2x^2 - 7x + 6 = 0$ (D) $3x^2 - 6x - 2 = 0$

4. यदि समीकरण $x^2 + kx - \frac{5}{4} = 0$ का एक मूल $\frac{1}{2}$ है, तो k का मान है

(A) 2 (B) – 2 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

5. निम्नलिखित में से किस समीकरण के मूलों का योग 3 है?

(A) $2x^2 - 3x + 6 = 0$ (B) $-x^2 + 3x - 3 = 0$

(C) $\sqrt{2}x^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}x + 1 = 0$ (D) $3x^2 - 3x + 3 = 0$

6. k के वे मान, जिनके लिए द्विघात समीकरण $2x^2 - kx + k = 0$ के मूल बराबर होंगे, निम्नलिखित हैं

(A) केवल 0 (B) 4 (C) केवल 8 (D) 0, 8

7. पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा द्विघात समीकरण $9x^2 + \frac{3}{4}x - \sqrt{2} = 0$ को हल करने के लिए, इसमें किस अचर को जोड़ना और घटाना चाहिए?

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{64}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{9}{64}$

8. द्विघात समीकरण $2x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ के

(A) दो भिन्न वास्तविक मूल हैं (B) दो बराबर वास्तविक मूल हैं

(C) कोई वास्तविक मूल नहीं हैं (D) दो से अधिक वास्तविक मूल हैं

9. निम्नलिखित में से किस समीकरण के दो भिन्न वास्तविक मूल हैं?

(A) $2x^2 - 3\sqrt{2}x + \frac{9}{4} = 0$ (B) $x^2 + x - 5 = 0$

(C) $x^2 + 3x + 2\sqrt{2} = 0$ (D) $5x^2 - 3x + 1 = 0$

10. निम्नलिखित में से किस समीकरण के कोई वास्तविक मूल नहीं हैं?

(A) $x^2 - 4x + 3\sqrt{2} = 0$ (B) $x^2 + 4x - 3\sqrt{2} = 0$

(C) $x^2 - 4x - 3\sqrt{2} = 0$ (D) $3x^2 + 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

11. समीकरण $(x^2 + 1)^2 - x^2 = 0$

(A) के चार वास्तविक मूल हैं (B) के दो वास्तविक मूल हैं

(C) के कोई वास्तविक मूल नहीं हैं (D) का एक वास्तविक मूल है

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: क्या $(x - 1)^2 + 2(x + 1) = 0$ का कोई वास्तविक मूल है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

हल : नहीं, क्योंकि यह समीकरण सरल करने पर $x^2 + 3 = 0$ रह जाती है, जिसका विविक्तकर -12 है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2: क्या निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए। यदि एक द्विघात समीकरण में x का गुणांक शून्य हो, तो उस द्विघात समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं होता।

हल : असत्य,क्योंकि इस स्थिति में विविक्तकर $-4ac$ होता है, जो ऋणेतर हो सकता है, यदि a और c विपरीत चिन्हों के हों अथवा a और c में से कोई एक शून्य हो।

प्रश्नावली 4.2

1. बताइए कि क्या निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के दो भिन्न वास्तविक मूल हैं। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

(i) $x^2 - 3x + 4 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 1 = 0$

(iii) $2x^2 - 6x + \frac{9}{2} = 0$ (iv) $3x^2 - 4x + 1 = 0$

(v) $(x + 4)^2 - 8x = 0$ (vi) $(x - \sqrt{2})^2 - 2(x + 1) = 0$

(vii) $\sqrt{2}x^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ (viii) $x(1 - x) - 2 = 0$

(ix) $(x - 1)(x + 2) + 2 = 0$ (x) $(x + 1)(x - 2) + x = 0$

2. लिखिए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों का औचित्य दीजिए।

(i) प्रत्येक द्विघात समीकरण का ठीक एक मूल होता है।

(ii) प्रत्येक द्विघात समीकरण का न्यूनतम एक वास्तविक मूल होता है।

(iii) प्रत्येक द्विघात समीकरण के न्यूनतम दो मूल होते हैं।

(iv) प्रत्येक द्विघात समीकरण के अधिकतम दो मूल होते हैं।

(v) यदि किसी द्विघात समीकरण में, x^2 का गुणांक और अचर पद विपरीत चिन्हों के हों तो उस द्विघात समीकरण के वास्तविक मूल होते हैं।

(vi) यदि किसी द्विघात समीकरण में, x^2 का गुणांक और अचर पद एक चिन्ह के हों तथा x का गुणांक शून्य हो, तो उस द्विघात समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं होता हैं।

3. पूर्णांकीय गुणांकों वाली एक द्विघात समीकरण के पूर्णांकीय मूल होते हैं। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

4. क्या किसी ऐसी द्विघात समीकरण का अस्तित्व है, जिसके सभी गुणांक परिमेय संख्याएँ हैं, परंतु दोनों मूल अपरिमेय हैं? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

5. क्या किसी ऐसी द्विघात समीकरण का अस्तित्व है, जिसके सभी गुणांक भिन्न – भिन्न अपरिमेय संख्याएँ हैं, परंतु दोनों मूल परिमेय हैं? क्यों?

6. क्या समीकरण $x^2 - 0.4 = 0$ का एक मूल 0.2 है? औचित्य दीजिए।

7. यदि $b = 0, c < 0$ है, तो क्या यह सत्य है कि $x^2 + bx + c = 0$ के मूल संख्यात्मक रूप से बराबर परंतु विपरीत चिन्हों के होंगे? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: द्विघात सूत्र का प्रयोग करते हुए, द्विघात समीकरण $2x^2 - \sqrt{5}x - 2 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

हल : $b^2 - 4ac = 5 - 4 \times 2 \times (-2) = 21$

अत:, मूल हैं: $\frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{21}}{4}$, अर्थात्, $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{21}}{4}$ और $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{21}}{4}$

प्रतिदर्श प्रश्न 2: $6x^2 - \sqrt{2}x - 2 = 0$ के मूल संगत द्विघात बहुपद के गुणनखंड करके ज्ञात कीजिए।

हल :

$$6x^2 - \sqrt{2}x - 2 = 6x^2 - 3\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}x - 2$$

$$= 3x(2x - \sqrt{2}) + \sqrt{2}(2x - \sqrt{2})$$

$$= (3x + \sqrt{2})(2x - \sqrt{2})$$

अब, $6x^2 - \sqrt{2}x - 2 = 0$ से $(3x + \sqrt{2})(2x - \sqrt{2}) = 0$ प्राप्त होता है। अर्थात् $3x + \sqrt{2} = 0$ या $2x - \sqrt{2} = 0$

अत:, वाँछित मूल हैं: $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ और $\frac{\sqrt{2}}{2}$

प्रश्नावली 4.3

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक में, द्विघात सूत्र का प्रयोग करते हुए, द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए:

(i) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

(ii) $5x^2 + 13x + 8 = 0$

(iii) $-3x^2 + 5x + 12 = 0$

(iv) $-x^2 + 7x - 10 = 0$

(v) $x^2 + 2\sqrt{2}x - 6 = 0$

(vi) $x^2 - 3\sqrt{5}x + 10 = 0$

(vii) $\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{11}x + 1 = 0$

2. गुणनखंडन विधि से निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए:

(i) $2x^2 + \frac{5}{3}x - 2 = 0$

(ii) $\frac{2}{5}x^2 - x - \frac{3}{5} = 0$

(iii) $3\sqrt{2}x^2 - 5x - \sqrt{2} = 0$

(iv) $3x^2 + 5\sqrt{5}x - 10 = 0$

(v) $21x^2 - 2x + \frac{1}{21} = 0$

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: जाँच कीजिए कि क्या समीकरण $6x^2 - 7x + 2 = 0$ के मूल वास्तविक हैं। यदि हैं, तो उन्हें पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

हल : विविक्तकर $= b^2 - 4ac = 49 - 4 \times 6 \times 2 = 1 > 0$ है।

अत:, दी हुई समीकरण के दो भिन्न वास्तविक मूल हैं।

अब, $6x^2 - 7x + 2 = 0$

अर्थात् $36x^2 - 42x + 12 = 0$

अर्थात् $\left(6x - \frac{7}{2}\right)^2 + 12 - \frac{49}{4} = 0$

अर्थात् $\left(6x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$ या $\left(6x - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

इसलिए मूल $6x - \frac{7}{2} = \pm\frac{1}{2}$ से प्राप्त होंगे।

अर्थात् $6x = 4, 3$

अर्थात् $x = \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

प्रतिदर्श प्रश्न 2: यदि अजिता ने अपने गणित के टेस्ट में 30 अंकों में से प्राप्त किए गए अंकों से 10 अंक अधिक प्राप्त किए होते, तो इन अंकों का 9 गुना उसके द्वारा वास्तव में प्राप्त किए गए अंकों का वर्ग होता। उसने टेस्ट में कितने अंक प्राप्त किए थे?

हल : मान लीजिए कि उसके वास्तविक अंक x थे।

अत: $9(x + 10) = x^2$

या $x^2 - 9x - 90 = 0$

अर्थात् $x^2 - 15x + 6x - 90 = 0$

अर्थात् $x(x - 15) + 6(x - 15) = 0$

अर्थात् $(x + 6)(x - 15) = 0$

अत: $x = -6$ या $x = 15$

क्योंकि x प्राप्त किए गए अंक हैं, इसलिए $x \neq -6$ है। अत:, $x = 15$ है।

इस प्रकार, अजिता ने गणित टेस्ट में 15 अंक प्राप्त किए थे।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : एक रेलगाड़ी 63 km की दूरी किसी निश्चित औसत चाल से तय करती है और फिर 72 km की दूरी प्रारंभिक चाल से 6 km/h अधिक औसत चाल से तय करती है। यदि यह पूरी यात्रा 3 घंटे में तय की गई है, तो प्रारंभिक औसत चाल क्या थी?

हल : मान लीजिए कि रेलगाड़ी की प्रारंभिक औसत चाल x km/h थी। अत:,

$$\frac{63}{x}+\frac{72}{x+6}=3$$

अर्थात् $$\frac{7}{x}+\frac{8}{x+6}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

अर्थात् $$\frac{7(x+6)+8x}{x(x+6)}=\frac{1}{3}$$

अर्थात् $21(x+6)+24x = x(x+6)$

अर्थात् $21x+126+24x = x^2+6x$

अर्थात् $x^2-39x-126=0$

अर्थात् $(x+3)(x-42)=0$

अर्थात् $x=-3$ या $x=42$

क्योंकि x रेलगाड़ी की औसत चाल है, इसलिए यह ऋणात्मक नहीं हो सकती।

अत:, रेलगाड़ी की प्रारंभिक औसत चाल 42km/h थी।

प्रश्नावली 4.4

1. ज्ञात कीजिए कि क्या निम्नलिखित समीकरणों के वास्तविक मूल हैं। यदि वास्तविक मूल हैं, तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

(i) $8x^2+2x-3=0$

(ii) $-2x^2+3x+2=0$

(iii) $5x^2-2x-10=0$

(iv) $\frac{1}{2x-3}+\frac{1}{x-5}=1, x\neq\frac{3}{2},5$

(v) $x^2+5\sqrt{5}x-70=0$

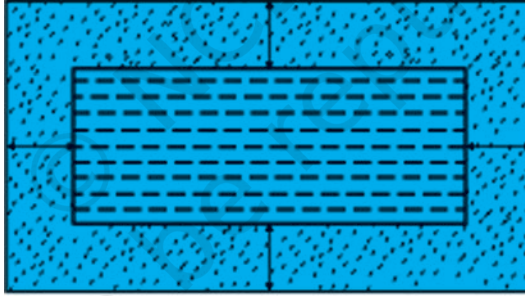
2. एक ऐसी प्राकृत संख्या ज्ञात कीजिए जिसके वर्ग में से 84 कम करने पर वह दी हुई संख्या से 8 अधिक संख्या के तिगुने के बराबर हो।

3. एक प्राकृत संख्या में जब 12 की वृद्धि की जाती है, तो वह अपने व्युत्क्रम के 160 गुने के बराबर हो जाती है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

4. एक रेलगाड़ी 360 km की दूरी एक-समान चाल के साथ तय करती है। यदि रेलगाड़ी यही दूरी 5 km/h अधिक चाल से तय करती, तो यात्रा में 48 मिनट कम समय लगता। रेलगाड़ी की प्रारंभिक चाल ज्ञात कीजिए।

5. यदि ज़ेबा अपनी वास्तविक आयु से 5 वर्ष छोटी होती, तो उसकी आयु (वर्षो में) का वर्ग उसकी वास्तविक आयु के पाँच गुने से 11 वर्ष अधिक होता। उसकी वर्तमान आयु क्या है?

6. आशा की वर्तमात आयु (वर्षो में) अपनी पुत्री निशा की आयु के वर्ग से 2 अधिक है। जब निशा अपनी माँ की वर्तमान आयु के बराबर होगी, तो आशा की आयु निशा की वर्तमान आयु के 10 गुने से 1 वर्ष कम होगी। आशा और निशा की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

7. विमाओं $50 \text{ m} \times 40 \text{ m}$ वाले एक आयताकार लॉन के बीचो-बीच में एक आयताकार तालाब इस प्रकार बनाया जाना है कि तालाब के चारों ओर लगी घास वाले भाग का क्षेत्रफल 1184 m^2 हो [देखिए आकृति 4.1]। तालाब की लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

आकृति 4.1

8. यह ज्ञात हुआ है कि सायं 2 बजकर t मिनट पर किसी घड़ी की मिनट वाली सुई को सायं 3 बजे का समय दर्शाने के लिए $\frac{t^2}{4}$ मिनट से 3 मिनट कम समय की आवश्यकता है। t ज्ञात कीजिए।